

Übungen zur Thermodynamik und Statistik

Ausnahmsweise: Abgabe in 2 Wochen

Abgabe am Montag, den 22. April 2002 (**2 Wochen!**), 11:00 Uhr
(Übungskästen)

Aufgabe 1: Normalverteilung, Stirling Formel (12 Punkte)

- a. Berechnen Sie das Integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$. 3 Punkte

Tip: Berechnen Sie I^2 in Polarkoordinaten.

- b. Berechnen Sie Mittelwert und Varianz der Gaußverteilung mit Wahrscheinlichkeitsdichte 3 Punkte

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (1)$$

- c. Ausgangspunkt ist die Darstellung für die Fakultät durch die Gamma-Funktion. Berechnen Sie eine Abschätzung für $\log N!$, indem Sie das Integral durch den Wert des Integranden am Maximum x_0 abschätzen (Sattelpunktapproximation). 2 Punkte

- d. Passen Sie nun den Integranden in der Nähe des Maximums bis zur zweiten Ordnung an $p(x) = Ae^{-(x-x_0)^2/2a^2}$ an und beweisen Sie damit die Stirlingsche Formel $N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}$. 4 Punkte

Aufgabe 2: Zentraler Grenzwertsatz zu Fuß (14 Punkte)

Seien X_i gleichverteilt in $(-0.5, 0.5]$ und sei $Z_J = \sum_{i=1}^J X_i$

- a. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle X_i^n \rangle$ für $n = 1, 2, 3, 4$ 2 Punkte

- b. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle Z_J^n \rangle$ für $n = 1, 2, 3, 4$ 4 Punkte

- c. Erstellen Sie ein kurzes C Programm, das N Zufallszahlen Z_J/a erzeugt. Wählen Sie a so, dass die Varianz 1 ist. Das Programm soll in der folgenden Form aufrufbar sein: 5 Punkte

```
zufall <N> <J>
```

Das Programm sollte ein normiertes Histogramm im Bereich $[-4, 4]$ mit 100 Elementen erstellen und als Liste

x , Häufigkeit im Intervall $[x - \delta x/2, x + \delta x/2)$

ausgeben.

- d. Erzeugen Sie Daten für $N = 10^6$ mit $J = 2, 4, 12$ und plotten Sie die Histogramme in `gnuplot` zusammen mit der Normalverteilung linear, und einfach-logarithmisch (y-Achse). 3 Punkte

Aufgabe 3: Erzeugung der Normalverteilung (15 Punkte)

- a. Sei Zufallsgröße X exponential verteilt mit Parameter λ ($p_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$). Sei $Y = \sqrt{X}$. Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_Y(y)$ von Y ? 2 Punkte
- b. Seien N_1 und N_2 normalverteilt mit $p_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Stellen Sie (N_1, N_2) in Polarkoordinaten (R, Θ) dar. Wie lautet die gemeinsame Verteilung $p_{R,\Theta}(r, \theta)$? Sind R, Θ unabhängig? 4 Punkte
- Hinweis: Falls $(W, Z) = f(X, Y)$ ist $p_{W,Z}(w, z) = f_{X,Y}(f^{-1}(w, z)) |\mathbf{J}^{-1}|$ mit $|\mathbf{J}^{-1}|$ die Jacobideterminante der inversen Transformation.*
- c. Wie kann man also Gauß-verteilte Pseudozufallszahlen mit Mittelwert x_0 und Varianz σ^2 erzeugen? 1 Punkt
- d. Erstellen Sie ein kurzes C Programm, das N Zufallszahlen erzeugt, die gemäß der Gaußverteilung $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$ verteilt sind. Das Programm soll in der folgenden Form aufrufbar sein: 5 Punkte

```
gauss <N> <sigma>
```

Das Programm sollte ein normiertes Histogramm im Bereich $[-5\sigma, 5\sigma]$ mit 100 Elementen erstellen und als Liste

```
x,Häufigkeit im Intervall [x - dx/2, x + dx/2)
```

ausgeben.

- e. Erzeugen Sie Daten für $N = 10000$ mit $\sigma = 1$ sowie $\sigma = 3$. Plotten Sie die Histogramme mit Hilfe von `Gnuplot` zusammen mit den Dichten $p(x)$ in linear sowie einfach logarithmischer Darstellung (y-Achse). 3 Punkte

Hinweis: Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Lösungen stets mit Ihrem **Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** beschriftet und zusammengeheftet sind. Werfen Sie die Lösungen am Montag jeweils bis spätestens 11:00 Uhr in die dafür bestimmten Kästen ein! Die Kästen werden um diese Zeit geleert, und die Lösungen unmittelbar an die Leiter der einzelnen Übungsgruppen weitergegeben. Senden Sie bis zum gleichen Zeitpunkt Ihre erstellten Programme per email an Ihren Betreuer.