Prof Dr. R. Kree
Dr. A. Hartmann

Sommersemester 2002
Blatt 5

Übungen zur Thermodynamik und Statistik

Abgabe am Montag, den 27. Mai 2002, 11:00 Uhr (Übungskästen)

Achtung, Achtung:

- Die erste Klausur findet am 15. Mai von 15.00 bis 18.00 im ZHG 102 statt. Erlaubte Hilfsmittel: **keine**.
- Wegen der Klausur und der Pfingstwoche ist die Abgabe dieses Blattes später (s.o.).
- Der Stoff dieses Blattes ist aber trotzdem klausurrelevant.
- Übungsgruppe 3 (Wolfgang Barthel) findet am Mittwoch den 8. Mai **nicht** statt. Interessierte können entweder zur parallel stattfindenden Gruppe 1 (Henning Löwe) oder zum Sondertermin Freitag den 10. Mai um 9.15 in den Preprintraum kommen.

Aufgabe 12: Großkanonische Gesamtheit (13 Punkte)
Leiten Sie die Verteilungsfunktion der großkanonischen Gesamtheit auf alternativen Wege her. Betrachten Sie dazu ein Übersystem von M physikalisch gleichwertigen Systemen jeweils im Kontakt mit einem Wärmebad bei Temperatur T und einem Teilchenreservoir bei chemischen Potential μ. Jedes System habe bei Zeichenzahl N die diskreten Energien $E_m(N)$ mit Eigenzuständen $|m, N\rangle$. Sei $n_m(N)$ die Anzahl der Systeme im Zustand $|m, N\rangle$.
Ziel ist es zu zeigen, dass sich für $n_m(N)$ im Fall $M \to \infty$ die Verteilung der großkanonischen Gesamtheit ergibt. Verwenden Sie dazu, dass in diesem Fall die Gesamtenergie E_t und die Gesamtteilchenzahl N_t asymptotisch scharf werden (also als konstant angesehen werden können), ebenso natürlich die Zahl M der Systeme.
Schrittweise:

a. Bestimmen Sie die Zahl (4 Punkte)

$$W(\{n_m(N)\}) \tag{1}$$

der Realisierungsmöglichkeiten für eine Verteilung $\{n_m(N)\}$ der M Systeme auf die Zustände. Geben Sie die Randbedingungen an.

b. Aufgrund der großen Teilchenzahl ist die Verteilung von W stark gepeakt. (4 Punkte) Daher wird immer mit extrem hoher Wahrscheinlichkeit die wahrscheinlichste Verteilung realisiert sein. Also:
Maximieren Sie W und arbeiten Sie die drei Randbedingungen für M, E_t, N_t mit Hilfe von Lagrangeschen Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ein. Was ergibt sich für $n_m(N)$?
TIP 1: Maximieren Sie $\ln W$, d.h. $\delta[\ln W + \text{Nebenbedigungen}] = 0$.
TIP 2: Verwenden Sie die Stirling Formel.

c. Berechnen Sie die Lagrangeschen Multiplikatoren. Verwenden Sie dazu, dass das Phasenvolumen $\Gamma(N_t, E_t)$ des Gesamtsystems wegen der Schärfe der Verteilung ungefähr gleich W ist, also $\ln \Gamma(N_t, E_t) \approx \ln W_{\max}$. Verwenden Sie weiterhin (mikrokanonische Betrachtung) $1/T = \frac{\partial}{\partial E_t} k_B \ln \Gamma(N_t, E_t)$ und $-\mu/T = \frac{\partial}{\partial N_t} k_B \ln \Gamma(N_t, E_t)$ sowie die Randbedingung für M. — 5 Punkte
TIP: Setzen Sie in $\ln W_{\max}$ das oben Ergebnis für $\ln n_m(N)$ ein, nicht aber für $n_M(N)$ (d.h. wo kein ln steht) und verwenden Sie nochmal die Randbedingungen.

Aufgabe 13: Gittergas (14 Punkte)
Betrachten Sie folgendes einfaches Modell für ein Gas: ein Gitter mit M Gitterplätzen. Auf jedem Gitterplatz können keines, eines oder maximal zwei Teilchen Platz finden. Seien n_i die Zahl der Plätze mit i Teilchen. Die Teilchen seien ununterscheidbar. Es gebe eine abstoßende Wechselwirkung zwischen den Teilchen, modelliert durch die Energie $E = \epsilon n_2$. Das Modell soll mit Hilfe der großkanonischen Zustandssumme gelöst werden.

a. Zeigen Sie, dass die Zahl der Realisierungsmöglichkeiten für n_1 einfach besetzte Plätze — 4 Punkte

$$\sum_{n_2} \binom{M}{n_1} \binom{M - n_1}{n_2} \tag{2}$$

beträgt. In welchen Grenzen läuft die Summe über n_2?

b. Zeigen Sie, dass sich für die großkanonische Zustandssumme $Z = (1 + z + e^{-\beta\epsilon} z^2)^M$ ergibt, wobei $z = e^{\beta\mu}$ die Fugazität ist. — 6 Punkte
TIP: Verwenden Sie zweimal $\sum_{i=0}^{K} \binom{K}{i} x^i = (1 + x)^K$.

c. Berechnen Sie die Energie $\langle E \rangle / M$ pro Gitterplatz und die Konzentration $\langle N \rangle / M$ der Teilchen als Funktion von T und z. — 4 Punkte

Hinweis: Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Lösungen stets mit Ihrem **Namen** und mit **Name des Leiters und Nummer Ihrer Übungsgruppe** beschriftet und zusammengeheftet sind. Werfen Sie die Lösungen am Montag jeweils bis spätestens 11:00 Uhr in die dafür bestimmten Kästen ein! Die Kästen werden um diese Zeit geleert, und die Lösungen unmittelbar an die Leiter der einzelnen Übungsgruppen weitergegeben. Senden Sie bis zum gleichen Zeitpunkt Ihre erstellten Programme per email an Ihren Betreuer.