

Übungen zur Thermodynamik und Statistik

Aufgabe 1: (Transformation von Zufallsgrößen)

Gegeben sei eine Zufallsgröße X mit Wahrscheinlichkeitsdichte $p_X(x)$ und Verteilungsfunktion $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(\tilde{x}) d\tilde{x}$, also $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$

- Die Zufallsgröße Y entstehe durch die Transformation $Y = H(X)$ aus X . H sei streng monoton. Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_Y(y)$ von Y ?
- Sei X gleichverteilt in $(0, 1]$. Wie lautet $p_X(x)$?
- Sei $H(x) = -\log(x)$. Wie ist $Y = H(X)$ verteilt?
- Erstellen Sie ein kurzes C Programm, das N Zufallszahlen erzeugt, die gemäß der Exponentialverteilung $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$) verteilt sind. Das Programm soll in der folgenden Form aufrufbar sein:

```
exponential <N> <lambda>
```

Das Programm sollte ein normiertes Histogramm im Bereich $[0, 10/\lambda]$ mit 100 Elementen erstellen und als Liste

x , Häufigkeit im Intervall $[x - \delta x/2, x + \delta x/2)$

ausgeben.

- Erzeugen Sie Daten für $N = 10000$ mit $\lambda = 1$ sowie $\lambda = 3$. Plotten Sie die Histogramm mit Hilfe von Gnuplot zusammen mit den Dichten $p(x)$ in linear sowie einfach logarithmischer Darstellung.

Aufgabe 2: (Dichteoperator)

Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Dichteoperators ($\hat{\rho} = \sum_i w_i |i\rangle \langle i|$)

- $\hat{\rho}$ ist hermitesch: $\hat{\rho}^+ = \hat{\rho}$
- $\hat{\rho} \geq 0$, d.h. $\langle a | \hat{\rho} | a \rangle \geq 0 \forall |a\rangle$.
- Sei $\{|i\rangle\}$ ein Orthonormalsystem. Zeigen Sie: $\hat{\rho}$ ist rein $\Leftrightarrow \hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$.
- Berechnen Sie die Bewegungsgleichung für den Dichteoperator.